International Journal of Human Sciences
ISSN:1303-5134

Volume: 12 Issue: 2 Year: 2015

Logicality of second-order logic: A critical inquiry on the related debates

İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme

Ali Bilge Öztürk[1]

Abstract

Being the pioneer of modern logic, Frege, with his quantification theory, was the pioneer of not only first-order logic, but also second-order logic. But today, as it may be seen from the recent pedagogical works clearly, learning modern logic has become almost equivalent to learning first-order logic. In the other words, first-order logic appears as the most natural, paradigmatic and central system of logic. However second-order logic either doesn't appear in recent pedagogical works or appears as an interesting detail of the history of logic. Moreover, today even the logicality of second-order logic has become controversial. In this controversy, two of the criticisms against the logicality of second-order logic have become more apparent than the others: (1) the logical incompleteness criticism, and (2) the ontological commitments criticism. In this study, these two criticisms, which were put forward as a justification of the claim that second order logic is not a purely-logical system, and several responses to these criticisms are tried to be clarified in a simple and untechnical manner. Additionally it is argued that, while these two criticisms are strong and justified, several responses to these criticisms are weak.

Özet

Modern mantığın öncüsü Frege niceleme kuramıyla, yalnızca birinci seviye mantığın değil, aynı zamanda ikinci seviye mantığın da öncüsüydü. Ancak günümüz pedagojik yapıtlarında da açıkça görülebileceği gibi bugün modern mantığı öğrenmek bunlardan birinci seviye mantığı öğrenmekle eşdeğer hale gelmiştir. Diğer bir deyişle birinci seviye mantık, mantığın en doğal, paradigmatik ve merkezi sistemi olarak kendini göstermektedir. Diğer taraftan ikinci seviye mantık ise günümüz pedagojik yapıtlarında ya yer almamakta ya da bu yapıtlarda mantık tarihinin ilginç bir ayrıntısı olarak yer almaktadır. Dahası bugün ikinci seviye mantığın mantıksallığı dahi tartışmalı hale gelmiştir. Bu tartışmalarda ikinci seviye mantığın mantıksallığına getirilen eleştirilerden ikisi diğerlerine göre daha belirgin hale gelmiştir. (1) Mantık sistemsel eksiklik eleştirisi ve (2) gizli ontolojik kabuller eleştirisi. Bu çalışmada ikinci seviye mantığın saf-mantıksal bir sistem olmadığı iddiasına gerekçe olarak ileri sürülen bu iki eleştiri ve bu eleştirilere getirilen çeşitli yanıtlar, basit ve teknik olmayan bir dille açık kılınmaya çalışılmıştır. Ek olarak bu iki eleştirinin güçlü ve haklı eleştiriler olduğu ve bu eleştirilere getirilen çeşitli yanıtların ise güçsüz olduğu savunulmuştur.

[1] Arş. Gör., Akdeniz Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü, alibilgeozturk@akdeniz.edu.tr

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

Keywords: Logicality, quantification, second-order quantification, logical incompleteness, ontological commitments, second-order logic.

Anahtar Kelimeler: Mantıksallık, niceleme, ikinci seviye niceleme, ontolojik kabuller, mantıksal eksiklik, ikinci seviye mantık.

(Extended English abstract is at the end of this document)

Giriş

Okuduğunuz çalışma üç bölümü içermektedir. Birinci bölümde 20. yüzyılın başında mantığın en doğal sistemlerinden biriyken günümüzde bazı tarihsel nedenlerden dolayı ne yurtiçinde ne de yurtdışında ayrıntılı bir eğitimi verilen ikinci seviye mantık sistemi hakkında giriş seviyesinde bazı bilgiler sunulmaktadır. Böylece ikinci seviye sistemi filozoflarca önemli ve tartışmaya değer kılan bazı özellikleri vurgulanmaktadır. İkinci bölüm ise ikinci seviye mantığın günümüzdeki tartışmalı statüsünün arkasındaki tarihsel çerçeveyi José Ferreiros'un yorumlarından da yararlanarak açık kılmaktadır. Üçüncü bölümde ise ikinci seviye mantığa getirilen en ünlü iki eleştiri, ilgili teknik kavramlarla birlikte, mümkün olduğunca basit ve teknik olmayan bir dille, karşı savunmalarını da içerecek şekilde açık kılınmıştır. Aynı zamanda bu bölümde anılan eleştiriler değerlendirilmiş ve bunların güçlü ve haklı olduğu savunulmuştur.

I.

İkinci seviye mantığın *mantıklığı*na ilişkin eleştirilere değinmeden önce, ikinci seviye mantığı daha iyi tanımak amacıyla mantık sistemlerinin nasıl seviyelendirildiği hakkında bazı notlar düşmenin faydası bulunuyor. Öncelikle iyi bilindiği gibi tipik olarak mantıkçılar mantıksal akıl yürütmeler üzerine, onları belirli *biçimsel* diller içinde ifade ederek çalışmayı pek çok farklı nedenden dolayı tercih eder. Bu türden biçimsel mantık dilleri çok çeşitli öğeleri içerir: Üzerine tartışılan nesneler hakkında mantıksal değişkenler (*variables*), bu nesneleri imleyen sabitler (*constants*), bu belirli nesnelerin belirli bir özelliğe sahip olduğunu veya bir kümeye ait olduğunu veya bir yükleme sahip olduğunu imleyen yüklem simgeleri (*predicates*), nesneler arasındaki ilişkileri imleyen mantıksal ilişkiler (*relations*), vb.. Dahası bu biçimsel diller yukarda sıralanan öğelerin çeşitli kurallar çerçevesinde birleştirilmesiyle oluşan önermeleri birbirine bağlayan mantıksal bağlaçlara (*logical connectives*) ve hatta önermelerin bizzat kendisini imleyen önerme değişkenlerine (*propositional variables*) sahiptir. Bu tür öğeler sayesinde doğal dilde ve bilimde ifade ettiğimiz yargıları bu biçimsel diller içerisinde simgesel olarak ifade ederiz.

Biçimsel mantık dilleri, başta matematik dünyası olmak üzere pek çok bilim dalında, pek çok *tartışma alanı* (*domain of discource*) üzerinde kullanılır. Burada *tartışma alanı* kavramının teknik bir

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

kavram olduğu not edilmelidir. Tipik olarak pek çok nesne kümesi hakkında akıl yürütmelerde bulunuruz. Bu kümeler doğal sayılar kümesi olabileceği gibi, akrabalık ilişkisi içinde bulunan insanlar kümesi de olabilir. Bir tartışma alanından bahsedildiğinde, varsayalım ki örneğin doğal sayılar kümesi bir tartışma alanı olarak ele alındığında, tartışma alanı doğal sayılar kümesinin öğelerini oluşturan bütün *nesneler* olarak anlaşılır. Yani tartışma alanı, ele alınan, üzerine akıl yürütmelerde bulunulan kümenin kapsamına giren bütün nesnelerdir. Daha doğru bir ifadeyle, üzerinde çalıştığımız kümenin kapsamının bizzat kendisi tartışma alanımızdır[2].

Bir tartışma alanı belirlendiğinde, tartışma alanında içerilen temel nesnelere ek olarak bu nesnelerin bazı özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileriyle de karşılaşılır. Örneğin tartışma alanımızı doğal sayılar kümesinin öğeleri olarak belirlediğimizde bütün doğal sayılar (1, 2, 3, vb.) tartışma alanımızın temel nesneleri, 2'nin bir "çift doğal sayı" olması 2 sayısının bir *özelliği*, 3 sayısının 2 sayısından sonra gelmesi (veya matematikçilerin sevdiği bir ifadeyle 3'ün 2'nin *ardılı* olması) 2 ve 3 sayılarının bir *ilişki*sidir.

İyi bilindiği gibi çoğu zaman, ele alınan tartışma alanındaki nesneler üzerinde yapılan akıl yürütmelerin geçerliliği, bu alanın nesnelerinin (ve hatta bazen bu nesnelerin özelikleri ve ilişkilerinin) nicelikleriyle de ilişkili olduğu için biçimsel dillerimiz çeşitli niceleyicilere de (*quantifier*) sahiptir ve modern mantık eğitimi almış herkes bu türden niceleyicilere aşinadır: "Bazı" (en az bir), "bütün". Bu niceleyiciler tartışma alanımızı oluşturan temel nesneler hakkında niceleme yapabileceği gibi, bu nesnelerin özellikleri ve birbirleri ile olan ilişkileri üzerine de niceleme yapabilir. Örneğin: (Doğal sayılar kümesinde) "en az bir asal sayı vardır" veya (Türkiye Cumhuriyeti vatandaşları kümesinde) "en az bir Antalyalı vardır" gibi ifadeleri ele alalım. Bu ifadelerde geçen "en az bir" niceleyicisi, tartışma alanını oluşturan temel nesneler hakkında bir nicelemede bulunur. Diğer taraftan "Bilge'nin en az bir özelliği vardır" veya "2 doğal sayısının en az bir özelliği vardır" şeklindeki ifadeler incelendiğinde, kolayca görülebileceği bu ifadelerde geçen "en az bir" niceleyicisi ilgili tartışma alanının temel nesneleri hakkında değil, bu nesnelerin özellikleri hakkında bir nicelemede bulunur. Benzer şekilde "Ahmet ve Mehmet arasında en az bir ilişki vardır" (örneğin birisinin diğerinden yaşça büyük olması) veya "2 doğal sayısı ile 4 doğal sayısı arasında en bir ilişki vardır" (örneğin birisinin diğerine tam bölünebilmesi) gibi yargılar incelendiğinde, bu yargılarda

[2] Üzerinde çalıştığımız nesneler üzerine biçimsel olarak çalışıyorsak, ifadelerimizi biçimsel olarak ifade etmeden önce tartışma alanımızı ifade etmemizin yararı bulunur. Çünkü tartışma alanımız biçimsel ifadelerimizin doğruluk değerini etkiler. Bu noktayı açık kılmak için "karesi iki olan hiçbir x yoktur" şeklinde yorumlanabilecek şu biçimsel ifadeyi ele alalım: "$\neg\exists x(x^2 = 2)$". Eğer bizim tartışma alanımız doğal sayılar ise, diğer bir ifadeyle doğal sayılar kümesi adlı *matematiksel model* üzerinde çalışıyorsak, ifade elbette doğrudur: Doğal sayılar kümesinde karesi 2 olan bir öğe yoktur. Ancak tartışma alanımız irrasyonel sayılar kümesi ise ifade elbette yanlıştır. Bu örnekte de açık olduğu üzere tartışma alanımız biçimsel ifademizin doğruluk değerini etkiler.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

içerilen "en az bir" niceleyicisinin tartışma alanını oluşturan temel nesneler üzerine değil, onların birbirleri ile olan ilişkileri üzerine niceleme yaptığı görülür.

Şimdi bir niceleyici yalnızca tartışma alanını oluşturan temel nesneler üzerine niceleme yapıyorsa *birinci seviye niceleyici* olarak adlandırılmaktadır. Eğer bir niceleyici tartışma alanını oluşturan temel nesnelerin özellikleri ve birbirleri ile olan ilişkileri hakkında nicelemede bulunuyorsa *ikinci seviye niceleyici* olarak adlandırılmaktadır. Eğer bir biçimsel mantık dili niceleyicilerden yalnızca birinci seviye niceleyiciler barındırıyorsa bu bir birinci seviye mantık dilidir ve bu dil üzerine kurulu mantık sistemi *birinci seviye mantık*tır. Eğer biçimsel mantık dili birinci seviye niceleyicilere ek olarak ikinci seviye niceleyiciler de içeriyorsa bu dil bir ikinci seviye mantık dilidir ve bu dil üzerine kurulu mantık sistemi *ikinci seviye mantık*tır[3ve4]. Kısaca ikinci seviye mantık dili, birinci seviye mantık dilinden farklı olarak ikinci seviye niceleyicilere de sahiptir.

Birinci ve ikinci seviye mantık dilleri arasındaki bu temel fark, kolayca görülebileceği gibi bu dillerin ifade güçleri arasındaki farklar hakkında da fikir sahibi olabilmemizi sağlar. İkinci seviye mantık dili içerdiği ikinci seviye niceleyiciler sayesinde daha yüksek bir ifade gücüne sahiptir: Eşdeyiyle birinci seviye mantık dilinde ifade edilemeyecek pek çok yargı ve akıl yürütme ikinci seviye mantık dili içerisinde ifade edilebilir. Örneğin:

1. A arabası b arabasının sahip olduğu bütün özelliklere sahiptir.
2. A arabası E özelliğine sahiptir.

   O halde b arabası da E özelliğine sahiptir.

şeklindeki akıl yürütme incelendiğinde birinci önermede içerilen "bütün" niceleyicisinin, tartışma alanımızı oluşturan temel nesneleri (arabalar) değil, onların özelliklerini nicelediği kolayca görülebilir. Bu nedenle birinci yargıyı biçimsel olarak ifade edebilmek için, birinci seviye mantığın sağlayamayacağı bir araç gereç olan ikinci seviye niceleyicilere sahip olmamız gerekir. İkinci seviye mantık dilinde basitçe ifade edebileceğimiz bu akıl yürütmeyi birinci seviye dilde ifade edemeyiz. Kısaca birinci yargı ve dolayısıyla bu akıl yürütme *birinciseviyeleştirilemez* (*nonfirstorderizable)* bir ifadedir.

1. Bütün X *özellikleri* için, eğer a arabası X özelliğine sahipse b de X özelliğine sahiptir.	$\forall X(Xa \rightarrow Xb)$[5]
2. A arabası Ö özelliğine sahiptir.	Öa
O halde b arabası da Ö özelliğine sahiptir.	∴Öb

[3] Kendisi de ikinci seviye mantığın savunucularından olan Stewart Shapiro'nun (1999: 824) maddesi ilgili terminoloji hakkında daha geniş bir sunum olarak incelenebilir.

[4] Henüz pek yaygın olmamakla birlikte, herhangi bir niceleyiciye sahip olmayan mantık sistemleri (örneğin önermeler mantığı) son zamanlarda mantıkçılar arasında *sıfırıncı seviye mantık* (*zeroth order logic*) olarak da anılmaya başlamıştır; ancak bu genel bir kullanım değildir.

[5] Bir niceleyicinin ikinci seviye bir niceleyici olduğunu biçimsel olarak göstermenin geleneksel yolu, örnekte uygulandığı gibi *ikinci seviye değişkeni* (X), yani bir nesne imleyicisi sabitle değil, bir özellik imleyici sabitle özellenerek dönüştürülebilir olan değişkeni büyük harfle ifade etmektir.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

Birinciseviyeleştirilemez yargılar yalnızca doğal dilde içerilmez. Matematiksel pratiğe yön veren pek çok aksiyom yalnızca ikinci seviye mantık dilinde tam olarak ifade edilebilir. İyi bilindik bir örnek ünlü *matematiksel tümevarım aksiyomu*dur[6]. Tümevarım aksiyomu (güçsüz), hangi özellik (veya formül) olursa olsun bu özelliğin doğal sayılar kümesindeki en küçük sayıda (0) bulunması ve doğal sayılar kümesindeki herhangi bir (*n*) sayının bu özelliğe sahip olmasının özelliğin bu sayının ardılı olan (*n+1*) sayısında da bulunmasını gerektirdiği durumda bu özelliğin doğal sayılar kümesinin bütün sayılarında bulunması gerektiğini ifade eden aksiyomdur. Dikkat edilebileceği gibi aksiyom belirli bir özellik (veya matematiksel formül) hakkında değil, doğal sayıların sahip olabileceği *bütün özelliklere* işaret ederek bir nicelemede bulunmaktadır. Bu nedenle bu yargı ancak ikinci seviye bir mantık dili içerisinde tam olarak biçimselleştirilebilir. Eğer tartışma alanımızı doğal sayılar kümesi olarak belirlersek ve Ax ifadesini x sayısının ardılı (x+1) olarak ifade edersek, tümevarım aksiyomunu ikinci seviye mantık dilinde ifade etmenin pek çok yolundan birine ulaşırız:

Bütün X özellikleri için, eğer 0 sayısı X özelliğine sahipse ve bütün x doğal sayıları için, x sayısının bu özelliğe sahip olması, x sayısının ardılının da bu özelliğe sahip olmasını gerektiriyorsa bütün x doğal sayıları X özelliğine sahiptir.
$\forall X\{[X0 \land \forall x(Xx \rightarrow X(Ax)] \rightarrow \forall X(Xx)\}$

Dahası pek çok matematiksel aksiyoma ek olarak matematiksel modellerin yapısal özelliklerine ilişkin pek çok yargı ancak ikinci seviye mantık dili içerisinde tam olarak ifade edilebilir. İyi bir örnek olarak doğal sayılar kümesinin *düzgün sıralanmışlık özelliği* (*well ordering property*) ele alınabilir. Basitçe bu özellik doğal sayılar kümesinin öğelerinden oluşan boş olmayan bütün alt kümelerin bir en küçük sayıya sahip olduğunu ifade eder. Doğal sayılar kümesinin bu yapısal özelliği ikinci seviye mantık dilinde kolayca ifade edilebilirken, birinci seviye dilde ifade edilemez. Örneğin *P* özelliğini, doğal sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesinin (hangisi olursa olsun fark etmez) öğeleri için doğru olma özelliği olarak yorumlarsak, düzgün sıralanmışlık özelliği ikinci seviye dil içinde şu şekilde ifade edilebilir:

Doğal sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesinin öğelerinde doğru olan bütün özellikler için, eğer bu özelliğe sahip bir sayı varsa (bu alt küme boş küme değilse), bu alt kümenin diğer öğeleri ya bu sayıyla özdeştir (eşittir) ya da ondan büyüktür.
$\forall P[\exists x\, Px \rightarrow \exists x(Px \land \forall y(Py \rightarrow (y = x \lor x < y)))]$

[6] Matematikçiler *güçsüz tümevarım*, *güçlü* (veya *tam*) *tümevarım*, *sonlu-ötesi* (*transfinite*) *tümevarım* gibi hepsi birbirinden farklı matematiksel tümevarım biçimlerini matematiksel pratikleri içerisinde uygularlar (Cook 2009:290; Tanton 2005:265-267). Bu çalışmada matematiksel tümevarımdan bahsederken, diğerlerine göre daha fazla bilindik olan *güçsüz tümevarım* aksiyomunun ifade edildiği not edilmelidir.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

Görüldüğü gibi ikinci seviye mantık yüksek ifade gücü sayesinde, pek çok matematiksel modelin birinci seviye mantık içinde ele geçiremediğimiz yapısal/biçimsel özelliklerini ele geçirebilmemizi sağlamaktadır[7]. Bu durum ikinci seviye mantık dilinin ayrıcalıklı bir statüye sahip olmasını sağlayan bir özelliğidir: Eğer tartışma alanımızı oluşturan matematiksel modeller üzerinde biçimsel olarak akıl yürüteceksek, ilgili modelin akıl yürütmelerimiz açısından kalkış noktası oluşturabilecek pek çok özelliğini ancak ikinci seviye mantık dili içerisinde ifade edebiliriz.

II.

Bu açıdan bakıldığında ikinci seviye mantık birinci seviye mantığın ikinci seviye niceleyicilerle genişletilmiş doğal bir uzantısı olarak görünse de tarihsel çerçeve çoğunlukla bu iki sistemi birbirlerinin rakibi olarak değerlendirmiştir. Bugün biliyoruz ki, daha yüksek ifade gücüne sahip olmasına rağmen ikinci seviye mantığın gerek pedagojik yapıtlardaki yeri, gerek matematiksel pratikteki uygulama alanı ve gerek doğal dil argümanlarının sınanması açısından uygulama alanı birinci seviye mantığa göre karşılaştırılamayacak kadar düşüktür. Buna yol açan nedenlerin başında matematikçilerin ve felsefecilerin kendi alanlarına ilişkin çalışmalarda birinci seviye mantığa ikinci seviye mantığa göre daha büyük bir araçsal rol vermesi gelmektedir. Dahası bugün çoğu felsefeci ve matematikçi için *mantık* kavramının kaplamı, ikinci seviye mantığı dışta bırakacak şekilde, yalnızca birinci seviye mantık olarak belirlenir. Bu gruba karşıt olarak pek çok mantıkçı ve felsefeci ise ikinci seviye mantığın da mantıksal bir sistem olduğunu savunmaktadır. Dolayısıyla görece uzun bir süredir ikinci seviye mantığın mantıklığı tartışması süregitmektedir. Bu bölümde hem ikinci seviye mantığın tartışmalı statüsünün arkasındaki tarihsel çerçeveyi aydınlatmak, hem de bu sisteme getirilen eleştirileri daha açık kılmak amacıyla bazı notlar düşülecektir.

Çoğu matematikçi ile filozofun ikinci seviye mantığa karşı olumsuz tutumu, mantığın ikinci seviye mantık aleyhine şüphecilikle sonuçlanan modern gelişiminden beslenir. Bu gelişimin ayrıntılarını takip etmek amacıyla bu çalışmada José Ferreiros'un "Modern Mantığa Giden Yol – Bir Yorum" adlı gün geçtikçe ünlenen (2001) makalesinden yararlanılacaktır. Çünkü bu çalışma mantık alanındaki kronolojik fakat analitik olmayan yapıt bolluğuna rağmen günümüz mantık kavrayışını şekillendiren süreçlerin tarihsel bir analizini yapan çok az sayıda yapıttan biridir. Anılan çalışma birinci seviye mantığın günümüzde nasıl mantığın merkezi ve paradigmatik sistemi haline geldiğini ve dolayısıyla ikinci seviye mantığın zaman içinde nasıl mantık kavramının kaplamı dışına atıldığını anlama ve bu süreci yorumlama amacıyla ortaya konmuştur.

[7] Bu örnek Herbert Enderton'ın Stanford Üniversitesi Çevrimiçi Felsefe Sözlüğü'ndeki "Second-order and Higher order Logic" adlı makalesinden (Enderton 2012) alınmıştır. Okuyucu, daha ileri bir okuma için anılan kaynakta başka pek çok birinciseviyeleştirilemez matematik önermesi örneğine kolayca erişebilir.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

Ferreiros'a göre (biçimsel) *mantık* kavramı 19. yüzyıl ortalarından günümüze doğru biri genişleme ve diğeri daralma evreleri olarak iki temel evreden geçmiştir. Birinci evre olan genişleme evresi 1850'li yıllarda başlayarak 1900'lü yıllara kadar sürmüştür. Bu dönemde Aristoteles'in kategorik kıyas (*syllogism*) kuramı biçimsel mantık kavramının kaplamından çıkmaya başlar ve 1900'lü yıllara doğru mantık kavramının kaplamı yavaş yavaş *önermeler mantığı*, *küme kuramı* ve *ilişkiler kuramı* olarak belirlenir. Dönemin sonunda Bertrand Russell'ın naif küme kuramında bulduğu ünlü Russell paradoksları yeni bir dönemin kapısını açar: Çünkü Bertrand Russell bizzat kendi bulduğu küme kuramsal paradoksları önlemek amacıyla kümeler kuramını (iyi bilindiği gibi A. N. Whitehead'le birlikte) *tipler kuramı* (*theory of types*) adıyla yeniden sistemleştirir ve bu sistem 1930 yıllara kadar biçimsel mantığın ana sistemi olarak değerlendirilir. Böylece 1900'lü yılların başında mantık önermeler mantığı, küme kuramı ve ilişkiler kuramının birleşimiyken, 1930'lu yıllara doğru çoğu kişi için mantık kavramının kaplamı artık tipler kuramından başka bir şey değildir.

1930'lu yıllar ise mantık kavramının kaplamına ilişkin ikinci bir evrenin başladığı dönemdir. Bu evreyi karakterize eden şey ise mantık kavramının yalnızca birinci seviye mantığı içerip, ikinci seviye mantığı ve tipler kuramı gibi daha ileri seviye sistemleri dışta bırakacak şekilde daralmaya başlamasıdır. Bu evrenin başlangıcına ilişkin Ferreiros iki gösterge ileri sürer: Birincisi 1930'lu yıllara doğru tipler kuramını oluşturan bazı aksiyomların (ünlü *sonsuzluk aksiyomu* ve *seçim aksiyomu*) yavaş yavaş çoğu kişi için saf mantıksal aksiyomlar olarak değil, matematiksel aksiyomlar olarak değerlendirilmesidir. Böylece Cantorcu kümeler kuramı ilk defa mantık kavramının sınırları dışına çıkarak matematiksel bir kuram olarak değerlendirilmeye başlanır. İkincisi olarak, tipler kuramı aslında ikinci ve daha üst seviye mantıksal dillerin kullanıldığı bir sistemdir. Ancak daha 1930'lu yıllara gelinmeden önce dahi tipler kuramı bu özelliği yüzünden şu şekilde ifade edilebilecek bazı felsefi eleştirilere konu olmaya başlamıştır: Kümeler kuramının temellerine yönelik çalışmaları tipler kuramı gibi ikinci ve hatta daha ileri seviye sistemlere dayandırmak, bu tür sistemleri kabul etmek soyut matematiğin bazı temel unsurlarını kabul etmeyi gerektirdiğinden bir kısır döngü yaratır. Bu eleştiriyi yapan matematikçiler ek olarak matematiğin temellerine ilişkin çalışmanın en iyi yolunun birinci seviye mantık sınırları içerisinde kalmak (dolayısıyla ikinci ve daha ileri seviye nicelemeden kaçınmak) olduğunu da ileri sürer.

1930'lu yıllardan önce çok küçük bir azınlık tarafından benimsenen ve birinci seviye mantığın matematiğin temelleri üzerine çalışmanın en iyi aracı olduğu şeklindeki bu kanı, 1930'lu yılların başında kanıtlanan bazı metamantıksal teoremler sonucu gün geçtikçe daha fazla benimsenir[8]. Özellikle ikinci dünya savaşından sonraki dönemde ise çoğu filozof ve matematikçi için artık birinci

---

[8] Ferreiros'un tespit ettiği bu kavrayış değişimini hızlandıran metamantıksal teoremlere, ikinci seviye mantığa getirilen eleştiriler incelenirken kısaca değinilecektir.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

seviye mantık, mantığın en doğal sistemi ve paradigmatik örneği haline gelir. Bu tutum mantık derslerinde de gün geçtikçe daha fazla gözlenebilir hale gelir ve zaman içinde modern mantığı öğrenmek, birinci seviye mantığı öğrenmekle eşdeğer hale gelir. Aynı dönem, yani ikinci dünya savaşı sonrası dönem, birinci seviye mantığın ikinci seviye mantığa karşı felsefi olarak da desteklenmeye başladığı bir dönemdir ve birinci seviye mantık bu dönemden itibaren (Quine başta olmak üzere) felsefi partizanlar da bulmaya başlar ve ikinci seviye mantığın mantıklığı da (birinci seviye mantığın lehine) sorgulanmaya başlanır. (Ferreiros 2001: 442-448)

Ferreiros'un saptamalarından bu çalışmanın konusu açısından çıkarılacak bazı önemli sonuçlar bulunuyor. Öncelikle İkinci Dünya Savaşı'ndan önceki dönemde ikinci seviye mantığa getirilen eleştiriler (birinci seviye mantığın lehine) daha çok bu mantık sisteminin matematiksel çalışmaları sürdürmenin uygun aracı olmadığı yönündeyken, İkinci Dünya Savaşı sonrası dönemde bu eleştiriler (yine birinci seviye mantığın lehine) ikinci seviye mantığın mantıklığı tartışmasına dönüşmüştür. İkinci olarak Ferreiros'un da saptadığı gibi, 1900'lü yılların başında mantığın bir bölümü olarak değerlendirilen küme kuramının zaman içinde mantıktan çok matematiğin bir bölümü olarak değerlendirilmeye başlaması ile birinci seviye mantığın, mantığın en doğal ve paradigmatik sistemi olarak ortaya çıkması arasında paralellikler vardır. Bu nedenlerle (1) ikinci seviye mantığın mantıklığı tartışması mantık ile küme kuramının (ve dolayısıyla matematiğin) sınırlarını belirlemek açısından önemli bir tartışmadır. (2) Bu tarihsel süreç, okuyucunun bir sonraki bölümde ikinci seviye mantığa getirilen eleştiriler incelenirken farkına varabileceği gibi, bu mantıksal sistemin mantıksallığının birinci seviye rakibiyle kıyaslanarak yapılması sonucunu getirmiştir. Dolayısıyla ikinci seviye mantığın mantıklığına getirilen eleştiriler bir yandan birinci seviye mantığın mantıklığını sabit tutup diğer taraftan ikinci seviye rakibinin mantıksallığını reddetme amacı taşırken, ikinci seviye mantığın savunucuları yine birinci seviye mantığın mantıksallığını sabit tutarken, ikinci seviye rakibinin mantıksallığını geri teslim etme amacını taşımaktadır.

III.

Bu genel tarihsel notlar çerçevesinde ikinci seviye mantığın *mantıksallığına* yapılan eleştiriler artık daha rahat anlaşılabilir. Bu çalışmada bunlardan en güçlü ikisi, bunlara getirilen en güçlü yanıt denemeleri ile birlikte açık kılınmaya çalışılacaktır. Bu iki eleştiriden biri bu sistemin mantık sistemsel eksikliğine işaret ederken, diğeri ikinci seviye mantığın bazı gizli ontolojik kabuller (örn. kümeler) gerektirdiğine işaret eder. Bunlar iki ayrı başlıkta incelenecektir.

a. *İkinci seviye mantık mantık sistemsel olarak eksiktir.*

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

İkinci seviye mantığa getirilen bu eleştiri, ikinci seviye mantığın, birinci seviye mantığa karşıt olarak *mantık sistemsel olarak eksik* (*incomplete*) olduğunu ifade eder. Şu halde mantık sistemsel eksiklik kavramı hakkında bazı notlar düşmenin faydası bulunuyor.

Tipik olarak mantık sistemlerinin bir semantik ve bir de sentaktik boyutu bulunur. Belirli bir biçimsel mantık sisteminin semantiğini belirlemek, çok kabaca, bu mantık sisteminin biçimsel dilini oluşturan simgeler ile bu simgelerle ifade edilebilecek yargıların anlamlarını ve dolayısıyla bu ifadeleri doğru (veya yanlış) kılacak şartları belirlemek demektir[9]. Örneğin önermeler mantığı ele alındığında "hem P hem de Q doğrudur" (P∧Q), "P veya Q'dan en az biri doğrudur" (PVQ) ve benzeri yargıların anlamlarını ve dolayısıyla onları doğru kılacak şartları belirlediğimizde kabaca önermeler mantığının semantiğini belirlemiş oluruz. Benzer bir şekilde "a bir B'dir" (Ba), "bazı x'ler B'dir" (∃xBx) veya "bütün x'ler B'dir" (∀xBx) ve benzeri ifadelerin anlamlarını ve dolayısıyla bunları doğru kılacak şartları belirlediğimizde ve bu belirlediğimiz semantiği önermeler mantığının semantiği ile birleştirdiğimizde birinci seviye mantığın semantiğini elde etmiş oluruz. Benzeri süreçleri ikinci seviye mantık dilinde ifade edilebilecek yargılar için de işleterek ve bunları birinci seviye mantığın semantiği ile birleştirerek ikinci seviye mantığın semantiğini belirlemiş oluruz.

Şimdi, belirli bir mantık sisteminin semantiğini bir defa belirlediğimizde, bu semantiğin, bu mantık sisteminin biçimsel dili içinde ifade edilebilecek yargılar arasında bir semantik sonuç (semantic consequence) ilişkisi oluşturduğunu görürüz. Bu ise bizi bu mantık sistemlerinin her biri için ayrı ayrı genel semantik sonuç bağlantıları tanımlamaya götürür. Örneğin bu temelde önermeler mantığının ortaya koyduğu semantik sonuç bağlantısı şu şekilde basitçe tanımlanabilir:

- Önermeler mantığında ö gibi bir önerme K gibi bir önermeler kümesinin semantik sonucudur $=_{tnm}$ önermeler mantığının semantiği, K önermeler kümesindeki bütün önermelerin doğru olmasının ö önermesinin de doğru olmasını zorunlu kılıyorsa.

Dikkat edilebileceği gibi bu tanımın formu birinci ve ikinci seviye sistemlerin (ve hatta tipler kuramı gibi daha ileri seviye sistemlerin) ayrı ayrı içerdiği semantik sonuç ilişkilerini tanımlamak için de kullanılabilir. Örneğin:

- "Birinci seviye mantıkta ö gibi bir önerme K gibi bir önermeler kümesinin semantik sonucudur $=_{tnm}$ birinci seviye mantığın semantiği, K önermeler kümesindeki bütün önermelerin doğru olmasının ö önermesinin de doğru olmasını zorunlu kılıyorsa", vb..

[9] Elbette belirli bir mantıksal dildeki ifadelerin doğruluk şartları (doğruluk değeri semantiği), bu dilin semantiğinin bütünü belirlemez. Bir mantıksal dilin semantiğini belirlemenin çok çeşitli boyutları vardır. Ancak konumuz açısından biçimsel diller semantiğin diğer boyutlarını bu çalışmada dışarda bırakıyoruz.

Şimdi, biliyoruz ki mantık sistemlerinin bir semantik boyutu olduğu kadar bir de sentaktik boyutu bulunmaktadır. Mantık sistemlerinin sentaktik boyutunu oluşturan en önemli unsurlarından birisi ise simgesel çıkarım kurallarıdır. Bu kurallar iyi bilindiği gibi basitçe simgesel dönüştürme/manipülasyon yoluyla belirli simgesel önermelerden başka önermelere ulaşmamızı sağlayan kurallardır. Ek olarak iyi bilindiği gibi önermeler mantığı mantıksal bağlaçları konu alan çıkarım kurallarını içerirken, birinci seviye mantık ek olarak birinci seviye niceleyicileri konu eden çıkarım kurallarına da ve ikinci seviye mantık öncekilerin hepsine ek olarak ikinci seviye niceleyicileri konu alan çıkarım kurallarına da sahiptir. Örneğin birinci seviye niceleyicileri konu alan bir çıkarım kuralı şu şekilde ifade edilebilir:

- *Varlık genellemesi* (*existential generalization*): "Ba" gibi bir ifadeden '∃x(Bx)" ifadesine ulaşılabilir.

İkinci seviye niceleyicileri konu alan bir çıkarım kuralı ise şöyle ifade edilebilir:

- *İkinci seviye varlık genellemesi* (*second-order existential generalization*): "Ba" gibi bir ifadeden '∃X(Xa)" ifadesine ulaşılabilir.

Tıpkı bir mantık sisteminin semantiğini bir defa belirlediğimizde bu semantiğin bu mantık sisteminde belirli bir *semantik sonuç* ilişkisi oluşturduğunu görmemiz gibi bir mantık sistemi için belirli bir biçimsel çıkarım kuralları kümesi belirlediğimizde de bu çıkarım kurallarının kendi başlarına bir *sentaktik sonuç* (*syntactic consequence*) ilişkisi belirlediğini fark ederiz. Bu ise bizi bu mantık sistemlerinin her biri için ayrı ayrı genel sentaktik sonuç ilişkileri tanımlamaya götürür. Örneğin bu temelde önermeler mantığının biçimsel çıkarım kuralları kümesinin ortaya koyduğu sentaktik sonuç bağlantısı şu şekilde basitçe tanımlanabilir:

- Önermeler mantığında ö gibi bir önerme K gibi bir önermeler kümesinin sentaktik sonucudur $=_{tnm}$ önermeler mantığının biçimsel çıkarım kuralları yardımıyla ö önermesi K önermeler kümesinde içerilen önermelerden biçimsel olarak türetilebiliyorsa (veya daha teknik bir ifadeyle K temelinde ö önermesi kanıtlanabiliyorsa).

Kolayca görülebileceği gibi bu tanımın formu birinci, ikinci ve daha üst seviye sistemlerin hepsinin ayrı ayrı sentaktik sonuç ilişkilerini tanımlamak için de kullanılabilir. Örneğin:

- '*Birinci seviye mantıkta* ö gibi bir önerme K gibi bir önermeler kümesinin sentaktik sonucudur $=_{tnm}$ birinci seviye mantığın biçimsel çıkarım kuralları yardımıyla ö önermesi K önermeler kümesinde içerilen önermelerden biçimsel olarak türetilebiliyorsa".

Şimdi, geleneksel olarak mantıkçılara göre bir biçimsel mantık sisteminin iyi bir mantık sistemi olmasının gerek şartlarından biri –ileri sürülebilmesi mümkün bir takım başka gerek şartlara ek

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

olarak- bu mantık sisteminde içerilen semantik sonuç ilişkisi ile sentaktik sonuç ilişkisinin birbirleriyle örtüşmesidir. Bu örtüşmenin kendi gerek şartlarından biri ise bu mantık sisteminde içerilen sentaktik sonuç ilişkisinin yine bu mantık sisteminde içerilen semantik sonuç ilişkisini *tam* olarak, yani *eksiksiz* biçimde ele geçirebilmiş olmasıdır. Daha açıklayıcı bir ifadeyle, bu mantık sisteminde *ö* gibi bir önerme ve *K* önermeler kümesini oluşturan önermeler ne olursa olsun, bu mantık sisteminin semantiğinin, K önermeler kümesinin bütünüyle doğru olmasının *ö* önermesinin de doğru olmasını zorunlu kıldığı her durumda, bu mantık sisteminin biçimsel çıkarım kurallarını kullanarak K önermeleri temelinde *ö* önermesi kanıtlanabilmelidir. İşte bu şartı sağlayan (daha doğrusu bu şartın sağlandığı kanıtlanan) bir mantık sistemi *tam* veya başka bir ifadeyle *eksiksiz* (*complete*) bir mantık sistemiyken bu şartı sağlamayan bir mantık sistemi *eksik* (*incomplete*) bir mantık sistemidir[10].

Bu ayrım temelinde mantık sistemleri incelendiğinde, önermeler mantığı tamdır ve onun tamlığı 1918'de Paul Bernays tarafından kanıtlanmıştır[11]. Yani önermeler mantığı, kendi içerdiği semantik sonuç ilişkisini bütünüyle ele geçirebilecek sonlu bir biçimsel çıkarım kuralları kümesine de sahiptir. Birinci seviye mantık da tamdır ve onun tamlığı 1929 yılında mantıkçı-matematikçi ve filozof Kurt Gödel tarafından kanıtlanmıştır. Dolayısıyla bu iki mantık sistemi, en azından kuramsal olarak, güçlü birer ispat kuramı sağlayabilmektedir. Ancak diğer taraftan ikinci seviye mantık tam değildir: İkinci seviye mantık, 1931 yılında ortaya çıktığı üzere, kendisine ilişkin *standart* semantiğin belirlediği semantik sonuç ilişkisini tam olarak ele geçirebilecek bir biçimsel kurallar kümesine sahip değildir. Bu sonuç Richard Dedekind'ın 1888'de kanıtladığı ikinci seviye Dedekind-Peano aritmetiğinin (PA_2) aksiyomlarının *kategorik* olduğuna ilişkin teoreminin ve Kurt Gödel'in 1931 yılında kanıtladığı *birinci eksiklik teoremi*nin mantıksal birleşiminin bir sonucudur[12].

---

[10] Yanlış anlaşılmaya yol açmamak adına burada belirli bir biçimsel *mantık sistemi*nin eksiksizliğinin konu edildiği ancak belirli bir biçimsel *kuramın* eksiksizliğinin konu edilmediği not edilmelidir. Bir biçimsel mantık sistemi ile bir biçimsel kuram iyi bilindiği gibi bazı yönlerden birbirlerinden ayrılır. Bir mantık sistemi geçerli akıl yürütme pratiklerimizi düzenleyen kuralları düzenleyip sistemleştirirken, bir kuram, en azından geleneksel bir bilim felsefesi yorumuna göre, konu edilen nesneler hakkındaki *doğruları* ele geçirmeyi amaçlar. İyi bilindiği gibi matematikçiler konu ettikleri matematiksel nesneler veya modeller hakkındaki doğrulukları elde etmek için de çeşitli biçimsel kuramlar kullanmaktadırlar: Peano aritmetiği, Robinson Aritmetiği, Zarmelo-Fraenkel Kümeler Kuramı vb.. Dolayısıyla belirli bir kuramın eksiksizliği konu edildiğinde bu kuramı oluşturan ilkelerin (örneğin kuram matematiksel bir kuramsa matematiksel aksiyomların) ele alınan matematiksel modele ilişkin bütün *doğruları* (bir teorem olarak) ele geçirip geçiremediği göz önüne alınır. Böylece eksiksizlik kavramı biçimsel mantık sistemleri için sentaktik ve semantik sonuç ilişkileri arasındaki özel bir duruma işaret ederken, matematikçilerin kullandığı türden biçimsel kuramlar (aksiyomatik sistemler) için bu kavram, kuramı oluşturan ilkeler ile ele alınan nesnelere veya modele ilişkin *doğrular* arasındaki özel biri duruma işaret eder. Okuyucu kuramsal eksiksizlik ve mantık sistemsel eksiksizlik ayrımı konusunda (Schumm 1999: 162-163) ve özellikle (Papineau 2012: 137-169)'da rahatça anlaşılabilir iki iyi sunuma erişebilir.

[11] Mantıkçılar önermeler mantığının tamlığının ilk olarak mantıkçı-matematikçi Paul Bernays tarafından 1918'de kanıtlandığı konusunda uzlaşmaya başlamıştır. Bu konuda (Shapiro 1991: 180) ve özellikle (Moore 1988: 116) görülebilir.

[12] Bu iki teoremin ikinci seviye mantığın eksikliğini nasıl gösterdiği metamantığın yüksek teknikliк içeren konularından biri olsa da mümkün olduğunca basitçe şu şekilde açıklanabilir. Matematikçiler ele aldıkları matematiksel yapıları (örneğin doğal sayılar) tanımlamak amacıyla yapıyı tanımlamaya yönelik aksiyomlardan oluşan kuramlar ortaya koyarken, ortaya

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

Hatırlanabileceği gibi bir önceki bölümde Ferreiros'un yaptığı tespitlerden biri 1930'lu yıllardan itibaren bazı teoremlerin etkisiyle çoğu matematikçinin, birinci seviye mantığı, matematiğin temellerini çalışmanın en iyi aracı olarak değerlendirmeye başlamasıydı. Bu teoremlerden ikisi birinci seviye mantığın tamlığının ve ikinci seviye mantığın eksikliğinin ortaya çıkmasıdır. Ancak bu dönemin düşünürleri bu teoremler temelinde birinci seviye mantığı matematiğin temelleri üzerine çalışmanın en iyi aracı olarak görmeye başlasa da bu durum onları henüz ikinci seviye mantığı mantıksal olmayan bir sistem olarak değerlendirmeye götürmemişti. İkinci seviye mantığın eksikliğine işaret ederek onu mantıksal olmayan bir sistem olarak değerlendirmeye yönelik görüşler görece daha yakın zamanlarda, çıkmıştır.

Eksiklik eleştirisinin belki de en ünlü örneği, bu konuda bazen W. V. O. Quine ismi de anılsa da[13], Leslie H. Tharp'tan gelmiştir. Tharp'a göre mantık iki anlamda ele alınabilir: (1) Kanıtlama aracı olarak ve (2) modelleri/yapıları karakterize etme aracı olarak (Tharp 1975: 5). Belirli bir mantık sisteminin diğerlerine göre tercih edilebilir bir kanıtlama aracı olmasını sağlayacak gerek şartlardan biri ise bu mantık sisteminin eksiksiz olmasıdır: Eksiksizlik şartı bir *mantık kavrayışı* sağlar ve iki rakip mantık sistemi ortaya çıktığında, bunları sınamak amacıyla bunlarda aranması gereken en temel şartlardan biridir(Tharp 1975: s. 6). Dahası bu şart bir takım başka şartlar lehine, örneğin daha yüksek ifade gücü şartı lehine kurban edilemez(Tharp 1975: 7). Dolayısıyla, birinciseviyeleştirilemez

koydukları aksiyomları hedef yapı dışında başka bir yapının gerçekleştirmemesini; ancak ortaya koydukları aksiyomları gerçekleştiren başka yapılar varsa bütün bu yapıların yapısal olarak aynı olmasını, yani *izomorfik* olmasını amaçlar. Bir aksiyomatik kuramın aksiyomlarını gerçekleştiren bütün yapılar izomorfikse bu tür kuramlara kategorik kuramlar denir. Kategorik olmayan kuramlar, yani aksiyomlarını gerçekleştiren birbirinden farklı yapılar bulunan kuramlar model kuramsal anlamda çelişki barındıran kuramlardır. Çünkü bu kuramın aksiyomlarını gerçekleştiren yapıların yapısal olarak farklılıklar barındırması sebebiyle bir yapıda doğru olan en az bir önerme başka bir yapıda yanlıştır. Richard Dedekind ise 1888'de PA_2'nin kategorik olduğunu, yani bu kuramın aksiyomlarını gerçekleştirebilecek her yapının doğal sayılar kümesiyle aynı yapıda (izomorfik) olduğunu kanıtlamıştır. Böylece doğal sayılar kümesine ilişkin her doğru önerme PA_2'nin aksiyomlarının mantıksal sonucu olmalıdır ve eğer PA_2'nin aksiyomlarından çıkarım yapmamızı sağlayacak mantık sistemi de (kanıt sistemi) eksiksizse, bu doğru önerme PA_2'nin aksiyomlarından sentaktik olarak da türetilebilmelidir (PA_2'nin teoremi olmalıdır). Burada PA_2'nin içerdiği aksiyomlardan birinin bir önceki bölümde simgesel ifadesi verilmiş olan ikinci seviye tümevarım aksiyomu olduğu not edilmelidir. Dolayısıyla PA_2'nin kanıt sistemini oluşturacak mantık ikinci seviye mantıktır. Ek olarak Kurt Gödel 1931 yılında temel aritmetiği kapsayacak kadar güçlü, *hesaplanabilir* her aksiyomatik sistemin tutarlı ise eksik olduğunu kanıtlamıştır. PA_2 bu şartları sağlayan bir sistem olduğu için PA_2 de eksiktir. Bu noktada PA_2'nin eksikliğinin ana kaynağına odaklandığımızda, Dedekind'ın teoremi sonucu PA_2'nin aksiyomlarını gerçekleştiren her yapının doğal sayılar kümesiyle aynı yapıda olduğunu ve doğal sayılar kümesine ilişkin her doğrunun PA_2'nin aksiyomlarının mantıksal sonucu olması gerektiğini biliyoruz. O halde sorunun kaynağı PA_2'nin kanıt sistemini oluşturan mantık sistemidir: İkinci seviye mantık eksiktir. Bu konuda temel düzeyde, teknik olmayan fakat daha ayrıntılı bir sunum için (Luna & Blum 2008) ve ispatları da içeren teknik bir sunum için (Manzano 1996: 115-129) önemle görülebilir.

[13] İkinci seviye mantık hakkında pek çok akademik ve pedagojik çalışmaya imza atmış olan Marcus Rossberg, ikinci seviye mantığın en ünlü karşıtlarından Quine'ın da eksiklik eleştirisini ikinci seviye mantığa karşı bir argüman olarak kullandığı yorumunu yapmıştır(2004: 305). Ancak yazarın atıfta bulunduğu metinler incelendiğinde (Quine 1986a[1970]: 90-91; 1986b: 646) bu metinlerin bu yorumu ne kadar desteklediği tartışmalıdır. Çünkü bu metinlerde Quine mantık sistemsel tamlığı mantıksallık için bir ölçüt olarak açıkça sunmamıştır. Kaldı ki başka bir yorumcu John Woods, Quine'ın, Gödel'in birinci seviye mantığın tamlığı teoremini mantıksallığın sınırları açısından bir ölçüt olarak değerlendirmediği yorumunu yapar. Çünkü Woods'a göre Quine, mantıksallığı konusunda şüpheci olduğu bazı *klasik mantıktan sapan mantık sistemlerinin* de (*deviant logics*) mantık sistemsel olarak eksiksiz olduğunu bilmektedir(Woods 1986: 712).

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

yargıları hatırlarsak, her ne kadar ikinci seviye mantık birinci seviye mantığa göre daha ileri ifade gücüne sahip olsa da bu durum ikinci seviye mantığın eksik bir sistem olduğunu gözden kaçırmamızı gerektirmez. Sonuç olarak Tharp'a göre, bir mantık sisteminin en temel görevlerinden biri iyi bir kanıtlama aracı olmaksa eksiksizlik vazgeçilemez, başka herhangi bir olumlu unsur lehine yokluğu kabul edilemez bir özelliktir. İkinci seviye mantık bu özelliğe sahip olmadığı, dolayısıyla iyi bir kanıtlama aracı olma işlevini yerine getirmediği için bir mantık sistemi sayılamaz.

Bu noktada bu eleştirinin altında yatan motivasyon sorgulanabilir. Rossberg'in de (2004: 305)'te ifade ettiği gibi, çoğu kişi *mantıksal sonuç* (*logical consequence*) kavramını temel olarak semantik bir kavram olarak değerlendirir: Bir *ö* önermesi *K* önermeler kümesinin *mantıksal sonucudur* ancak ve ancak *K*'nın doğruluğu *ö*'nün doğruluğunu garanti ediyorsa. Dolayısıyla bu kişilere göre eksik bir mantık sisteminde, sistemin biçimsel çıkarım kurallarının karakterize ettiği sentaktik sonuç ilişkisinin kapsamak açısından güçsüzlük çektiği şey, yalnızca semantik sonuç ilişkisi değil bizzat mantıksal sonuç ilişkisinin kendisidir. O halde elimizde hedeflenen mantıksal sonuç ilişkisini (örneğin ikinci seviye mantıksal sonuç durumlarının hepsini) kapsayacak kadar güçlü bir biçimsel kurallar kümesi yoksa bu eleştiriye göre, ortada bir mantık sistemi de yoktur.

Böyle bir eleştiriye karşı çıkmak için izlenebilecek çeşitli stratejiler bulunmaktadır. Bu stratejilerden biri, Tharp'ın iddia ettiğinin tam aksine eksiksizlik özelliğinin ikinci seviye mantığın sahip olduğu bazı önemli özellikler lehine göz ardı edilebilir olduğunu ileri sürmektir. Bu yaklaşımın belki de en güçlü örneği Otávio Bueno'dan gelmiştir. Bueno'ya göre ikinci seviye mantığın ileri ifade gücünün önemi yeterince anlaşılmamaktadır. İkinci seviye mantık, birinci seviye rakibinden daha güçlü bir ifade gücüne sahiptir. Öyle ki ikinci seviye mantık, ileri ifade gücü sayesinde birinci seviye rakibinden farklı olarak: (a) Matematiğe temel olan çoğu alanı (örneğin real sayılar, küme kuramı, vb.) kategorik olarak karakterize edebilmektedir(Bueno 2010: 369). (b) Çoğu matematiksel ve mantıksal kavram ancak ikinci seviye mantık içinde karakterize edilebilir. Örneğin birinci seviye mantıkta, mantığın en temel kavramlarından biri olan özdeşlik kavramı bile karakterize edilemezken, ikinci seviye mantıkta bu mümkündür: "$x=y \leftrightarrow \forall P(Px \leftrightarrow Py)$" [14] (Bueno 2010: 369). (c) "Günümüz matematiğini (…) formüle edebilmek için gerekli olan şeylerin neredeyse tamamı ve matematiğin bilimde uygulama alanı bulmuş kısmı ikinci seviye diller içinde ifade edilebilir" (Bueno 2010: 370). Bütün bunların sonucunda (Tharp ve benzeri düşünürlerin görüşlerinin aksine) ikinci seviye mantığın eksiksizliği göz ardı edilebilir. Dahası Bueno'ya göre birinci seviye mantık kısmen, ikinci seviye mantığın sahip olduğu bu tür yeteneklere sahip olmadığı için eksiksizdir. Ancak

[14] Bueno'nun sunmuş olduğumuz bu iddiasının tartışmalı bir iddia olduğunu not etmeliyiz. Çünkü bu iddiayı kabul edebilmek için, "$\forall x \forall y[\ \forall P\ (Px \leftrightarrow Py\ ) \rightarrow x=y\ ]$" şeklinde biçimsel olarak ifade edilebilecek olan ve tamamen aynı özelliklere sahip iki nesnenin özdeş olduğunu ifade eden tartışmalı bir metafiziksel tezi kabul etmemiz gerekiyor. İlgili tartışma literatürüne giriş için (Forrest 2012) görülebilir.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

eksiksizlik bir mantık sisteminde ancak bu türden şartları sağladığında sahip olunması anlam kazanan bir özelliktir(Bueno 2010: 370). Sonuç olarak Bueno'ya göre ikinci seviye mantık, yalnızca bir *mantık* sistemi değil, aynı zamanda birinci seviye rakibinden daha iyi bir mantık sistemidir.

Diğer taraftan bu strateji tartışma bitirici bir strateji değildir. Çünkü strateji birinci seviye mantığın ifade gücünü oldukça küçümser: Bugün en iyi matematik kuramlarımız, örneğin çoğu kişi için matematiğin en genel geçer ortak temeli (*the most common foundation of mathematics*) olarak bilinen *Zarmelo-Fraenkel Küme Kuramı* (ZFC) dahi birinci seviye mantık dilinde ifade edilmiş bir sistemdir.

Bu eleştiriye karşı geliştirilebilecek ikinci bir strateji bir mantık sisteminin iyi bir *kanıtlama aracı* olarak değerlendirilmesi için eksiksizlik dışında başka şartları da gerektirdiğini ve birinci seviye mantığın bu şartlara sahip olmadığını ileri sürmektir. Örneğin çeşitli düşünürler (Boolos 1975: 523-524; Ketland 2005; Bueno 2010: 370-371; Ketland 2005; Pickin-web) eksiksizlik özelliğine ek olarak *kararlaştırılabilirliğin* de (*decidability*) bir mantık sisteminin iyi bir *kanıtlama aracı* olmasının gerek şartlarından biri olarak değerlendirilebileceğini ileri sürmüştür[15]. Ancak belirtmek gerekiyor ki bu strateji de iki açıdan makul değildir. Çünkü (1) bu yaklaşım kararlaştırılabilirlik ölçütünde olduğu gibi birinci seviye mantığın lehine bir sonuç doğurmazken, ikinci seviye mantığın lehine de bir sonuç doğurmaz. Bu yaklaşımla gelinebilecek son nokta birinci seviye mantığın da ikinci seviye mantık gibi iyi bir kanıtlama aracı olmadığını ve dolayısıyla bir mantık sistemi olmadığını kabul etmektir. Ek olarak (2) eksiksizlik talebi keyfi bir talep değildir. Mantığın modern biçimsel gelişiminin bir amacı kanıtlamaları biçimsel olarak yapabilmektir ve mantıksal kanıtlamaları biçimsel olarak yapacaksak eksiksizlik talebi iyi anlaşılmış ve temelleri olan köklü bir taleptir. Yani *ö* eğer *K* önermeler kümesinin mantıksal sonucuysa, *K* temelinde *ö* biçimsel olarak da türetilebilmeli/kanıtlanabilmelidir. Elbette bu çıkarım süreci çok uzayabilir ve karmaşıklaşabilir. Böyle durumlarda sistem içinde hangi çıkarımın geçerli olup olmadığını daha kısa yoldan anlayabilecek üst yöntemler aranabilir ve bu bakımdan sistemin kararlaştırılabilirlik özelliğine sahip olması *uygulama* açısından önemli bir değer kazanır. Hem birinci seviye mantığın hem de ikinci seviye mantığın bu özelliğe sahip olmadığını çeşitli teoremlerden biliyoruz. Ancak birinci seviye mantığın tamlığı teoreminin bir sonucu olarak, bu çıkarım süreci ne kadar uzarsa uzasın, sistemin biçimsel kuralları temelinde bu çıkarımın tamamlanabileceğini en azından kuramsal olarak biliyoruz. Ancak bu durum ikinci seviye mantık için (savunucuları bu durumun *uygulamada* bir farklılık çıkarmayacağını iddia etse de) en azından

[15] Bir mantık sistemi için kararlaştırılabilirlik (*decidability*) kavramı, bu mantık sisteminin biçimsel dili içinde ifade edilebilecek akıl yürütme biçimlerinden hangisinin geçerli olup hangisinin olmadığını görebilmemizi sağlayacak etkili bir üst yöntemin olması anlamına gelir. Örneğin önermeler mantığı için böyle bir yöntem vardır: Doğruluk tablosu yöntemi. Ancak birinci ve ikinci seviye mantık için böyle bir yöntem yoktur ve dahası *Church Turing Teoremi* olarak bilinen bir teoremin sonucu böyle bir karar yöntemi bulunamaz.

kuramsal olarak mümkün değildir. Bu bakımdan eksiklik eleştirisi ikinci seviye mantığa ilişkin güçlü bir eleştiridir ve yeterince iyi bir karşı savunma yapılamamıştır.

b. *İkinci seviye mantık gizli ontolojik kabuller içerir.*

İkinci seviye mantığa getirilen bu eleştiri, ikinci seviye mantığı bir mantık sistemi olarak kabul etmenin bazı ontolojik kabuller, örneğin kümeler gibi soyut matematiksel nesnelerin varlığını ve dolayısıyla bir küme kuramsal hiyerarşiyi kabul etmeyi gerektirdiği eleştirisidir. Bu eleştiriyi açık kılmak üzere mantık sistemlerinin semantik boyutu hakkında bazı notlar düşmek gerekiyor.

Hatırlanabileceği gibi mantık sistemlerinin bir semantik ve bir de sentaktik boyutu bulunur. Birinci seviye mantığın semantiğinden bahsedildiğinde, daha önce de belirtildiği “a bir B’dir” (Ba), “bazı x’ler B’dir” (∃xBx) veya “bütün x’ler B’dir” (∀xBx) ve benzeri ifadelerin semantiği anlaşılır. Onların semantiği hakkında ise kısaca şunlar söylenebilir. Birinci seviye bir ifadenin ortaya koyulması, bir tartışma alanı varsaymayı gerektirir ve her tartışma alanı bilindiği gibi üzerine söz söylenen temel nesnelerin oluşturduğu bir topluluk veya kümedir. Biçimsel ifadeleri oluşturan “a”, “b” gibi ad sabitleri bu topluluktaki nesneleri imlerken, “x”, “y” gibi birinci seviye değişkenler yine bu topluluktaki nesneler üzerinde değişir. Aynı şekilde bütün yüklemler, bu tartışma alanının belirli bir alt topluluğu veya kümesiyle ilişkilendirilir.

Bu açıdan bakıldığında “a bir B’dir” (Ba) gibi bir ifadeyi doğru kılan şart, bu alandaki “a” ad sabitiyle imlenen nesnenin bu alanın B yüklemiyle ilişkilenen bir alt kümesinin elemanı olmasıdır. Benzer bir şekilde “bazı x’ler B’dir” (∃xBx) gibi bir ifadeyi doğru kılacak şart bu tartışma alanındaki en az bir nesnenin, bu alanın B yüklemiyle ilişkilenen bir alt kümesinin elemanı olmasıdır. Aynı şekilde “bütün x’ler B’dir” (∀xBx) gibi bir ifadeyi doğru kılacak şart, bu tartışma alanındaki bütün nesnelerin, bu alanın B yüklemiyle ilişkilenen bir alt kümesinin elemanı olmasıdır.

Bu noktadan bakınca birinci seviye mantık ifadeleri ilk bakışta küme gibi soyut matematiksel nesneler üzerine bildirimde bulunuyormuş gibi görünse de durum böyle değildir. Onlar üzerinde tartışılan alanın temel nesneleri hakkında bildirimde bulunur. Ancak ikinci seviye mantık, içerdiği ikinci seviye niceleyicilerle, yani yüklemleri (ve dolayısıyla onlarla ilişkilenen alt kümeleri) niceleyen niceleyicilerle başka bir tartışma boyutu açar: Yüklemleri nicelemek (özellikle varlık niceleyicisiyle nicelemek), çoğu kişi için bu yüklemle ilişkilenen bir kümenin varlığını kabul etmeyi gerektirir. Böylece çoğu kişi “∃B(Ba)” gibi bir ifadeyi şu şekilde yorumlar: Ele alınan tartışma alanının öyle bir B alt kümesi vardır ki a nesnesi B kümesinin öğesidir. Böylece bu ifadeler ele alınan tartışma alanının temel nesneleri üzerine değil, bu alanında içerilen bir takım kümeler üzerine bildirimde bulunuyormuş gibi görünür.

Dahası ikinci seviye mantıkta mantıksal olarak geçerli bazı ifadeler birer kümeyi karakterize ediyormuş gibi görünür. Örneğin ‘$\exists X \forall x (Xx \leftrightarrow \neg\, x = x)$” gibi bir ifade şu şekilde yorumlanabilir: (Tartışma alanında) öyle bir küme vardır ki kendi kendisiyle özdeş olmayan her şey bu kümenin bir elemanıdır. Kendi kendisiyle özdeş olmayan hiçbir nesne olamayacağına göre bu ifade tartışma alanını oluşturan kümenin bir *boş alt kümeye* sahip olduğunu ifade ederek *boş kümeyi* karakterize eder. Benzer bir şekilde ‘$\exists X \forall x (Xx \leftrightarrow x = x)$” gibi bir ifade şöyle yorumlanabilir: (Tartışma alanında) öyle bir küme vardır ki, kendi kendisiyle özdeş olan her şey bu kümenin bir elemanıdır. Her nesne kendi kendisine özdeş olduğu için bu ifade tartışma alanını oluşturan bütün nesnelerden oluşan bir kümenin varlığını ifade eder[16]. Sonuç olarak ikinci seviye mantıkta geçerli bazı ifadeler, bazı kümelerin varlığı hakkında bildirimde bulunuyormuş gibi yorumlanabilir.

Şimdi, eğer eleştiri haklıysa bu durum iki açıdan sorun çıkarır. (1) Nasıl evrim kuramı canlıların evrimini, sayı kuramı (aritmetik) sayıları ve küme kuramı da kümeleri konu ediyor ve bunların üzerine bildirimde bulunuyorsa ikinci seviye mantık da kümeler üzerine bildirimde bulunduğu için bir çeşit küme kuramıdır. Dolayısıyla ikinci seviye mantık bu özelliğiyle bir mantık sisteminden çok matematik kuramı olarak değerlendirilmelidir. Diğer bir değişle Quine'ın ünlü bir metaforik sözüyle ifade ettiği gibi, ikinci seviye mantık, "koyun postuna gizlenmiş küme kuramıdır".

İkinci seviye ve tipler kuramı gibi daha üst seviye sistemlerin bu özelliği bir önceki bölümde Ferreiros'tan aktarılan saptamalardan da hatırlanabileceği gibi 20. yüzyılın başlarında da bazı düşünürlerin dikkatini çekmiş ve bu durum onları matematiğin temelleri üzerine çalışmanın en iyi yolunun birinci seviye mantık sınırlarında kalmak olduğu fikrine götürmüştü. Ayrıntılar Ferreiros'un çalışmasında daha detaylı olarak takip edilebilir. Diğer taraftan ikinci seviye mantığın bu özelliğine işaret ederek onun mantıksallığını tartışmak daha yakın zamanlarda gerçekleşmiştir ve bunun ilk örneği Quine'dan gelmiştir. Quine ünlü *Mantık Felsefesi* yapıtında ikinci seviye mantığı "koyun postuna gizlenmiş küme kuramı" olarak değerlendirir (Quine 1986a[1970]: 66). Quine'ın bu eleştirisinden sonra bu söz eleştiriyi kabul edenlerce bir slogan haline gelmiştir.

İkinci seviye mantığın bu özelliğinin ortaya çıkardığı diğer bir sıkıntı ise (2) ikinci seviye mantığın *konusuz* (*topic-neutral*) olmadığıdır. Yani nasıl bir doğa bilimleri kuramı veya bir matematik kuramı belirli bazı nesnelerden oluşan bir konu alanına sahipse ikinci seviye mantık da belirli

[16] Bu yargıların neden ikinci seviye mantıkta geçerli olduğu sorgulanabilir. Açıklama kabaca şu şekilde verilebilir. İkinci seviye mantık, "Eğer P herhangi bir özellikse, bu özelliği gerçekleştiren nesnelerden oluşan bir küme vardır" şeklinde ifade edilebilecek bir ilkeyi (dedüktif) sisteminde (bir aksiyom şeması olarak) barındırır (Shapiro 1991: 66-67). Bu ifadeler ise bu ilkeyi gerçekleştirmektedir: Birinci ifade kendi kendisiyle özdeş olmama özelliğini taşıyan nesnelerden oluşan bir kümenin varlığını bildirirken ikinci ifade kendi kendisiyle özdeş olma özelliğini taşıyan nesnelerden oluşan bir kümenin varlığını bildirir. Dolayısıyla bu ifadeler ikinci seviye mantıkta içerilen bir ilkeyi gerçekleştirdiği için ikinci seviye mantıkta geçerlidir.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

nesnelerden oluşan bir konu alanına (kümeler) sahiptir. Ancak geleneksel olarak bir (biçimsel) mantık sisteminden beklenilen en önemli özelliklerden biri konusuz olmasıdır.

Şimdi, bu eleştiri ikinci seviye mantığın mantıksallığına getirilmiş çok güçlü bir eleştiridir. Bu eleştiriye karşı en ünlü savunmalar ise George Boolos'tan gelmiş olup bu savunmalar incelenmeyi önemle gerektiriyor. Boolos, Quine'ın eleştirisine ilk yanıt veren filozoflardan biridir ve bu konudaki ilk çalışmasını (1975) makalesiyle yapmıştır. İkinci seviye mantığın küme kuramından en küçük bir parça bile barındırmadığını temellendirmeye çalıştığı bu çalışmasında Boolos, yine de ikinci seviye mantığın en az bir kümenin varlığını kabul etmeyi gerektirdiğini kabul etmiştir: *Boş küme* (1975: 520). Dolayısıyla Boolos ikinci seviye mantığın konusuz olmadığını da bu çalışmada kabul etmektedir. Ancak Boolos'a göre bu durum ikinci seviye mantığı bir mantık sistemi olarak değerlendirmemeyi gerektirmez. Çünkü her mantık sistemi bir anlamda konu sahibidir: Nasıl aritmetik yalnızca sayıları değil aynı zamanda toplama, çıkarma vb. gibi işlemleri de konu ediyorsa mantık da değilleme, mantıksal birleşme, mantıksal ayrışma vb. gibi durumları konu eder. Bu açıdan hiçbir mantık sistemi, birinci seviye mantık da dahil olmak üzere, tıpkı ikinci seviye mantık gibi, konusuz değildir. Dahası *küme, sınıf, özellik, ilişki* ve *kavram* gibi pek çok nosyon geleneksel olarak saf mantıksal kavramlar olarak değerlendirilmiştir ve bu bakımdan kümelerin ve ilişkilerin varlık niceleyicisiyle nicelenerek sistem tarafından ontolojik kabul görmesi ikinci seviye mantığı bir mantık dışı sistem olarak değerlendirmeyi gerektirmez(Boolos 1975: 517).

Devam etmeden önce Boolos'un bu erken dönem stratejisi üzerine bir değerlendirme yapmanın faydası olacak. Öncelikle küme kavramı Boolos'un iddiasının aksine, saf mantıksal olup olmadığı tartışmalı bir kavramdır: Çoğu kişi kümeleri mantıksal olmaktan çok matematiksel nesneler olarak değerlendirmeye daha yatkındır. İkinci olarak aritmetiğin toplama ve çıkarma gibi işlemleri konu etmesi ile mantık sistemlerinin değilleme, mantıksal birleşme, mantıksal ayrışma gibi durumları konu etmesi arasında önemli farklar vardır. Bir aritmetik kuramı her ne kadar toplama, çıkarma gibi işlemleri de konu etse de nihai olarak belirli bir nesne topluluğu üzerine bildirimde bulunur. Örneğin aritmetiğin on iki sayısının beş ve yedi sayısının toplamı olduğunu bildirerek on iki sayısı üzerine bildirimde bulunması gibi. Ancak mantık sistemleri her ne kadar mantıksal değilleme, mantıksal birleşme, ayrışma gibi durumları da konu etse de nihai olarak belirli bir nesne kümesi üzerine bildirimde bulunmaz. İyi bilindiği gibi mantık sistemlerinin konusuzluğu, mantıksal kuralların düşünülebilecek bütün nesnelere uygulanabilmesi anlamında bir konusuzluktur. Bu nedenlerle Boolos'un bu erken dönem stratejisi tartışma bitirici bir strateji olarak değerlendirilmemelidir.

Diğer taraftan Boolos bu erken dönem çalışmasından birkaç yıl sonra ardı ardına gelen iki çalışma (Boolos 1984; Boolos 1985) ile çok daha güçlü bir strateji belirlemiştir. Bir öncekinden daha

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

ileri giden bu stratejiyle Boolos ikinci seviye mantıksal ifadelerin kümeler gibi bazı ontolojik kabuller gerektirdiği iddiasını tamamen reddetmiştir. Strateji kabaca şu şekilde ifade edilebilir: Eğer "∃X(…)" gibi bir ifadeyi "ö*yle bir* küme vardır ki(…)" şeklinde değil ancak; *çoğul niceleyicilere*[17] başvurmak yoluyla "*öyle bazı* nesne(*ler*) vardır ki(…)" şeklinde yorumlarsak, benzer bir şekilde "Xy" gibi bir ifadeyi "y, bunlardan biri" şeklinde yorumlarsak vb. bu ikinci seviye ifadelerin kümeler gibi ontolojik kabuller gerektirmediği sonucuna varırız. Yani Boolos ikinci seviye ifadeler için, "küme" kavramına başvurmayıp gündelik dilin çoğul niceleyicilerine başvurarak yeni bir yorum şeması önerir (1984). Boolos (1985) çalışmasında ise bu stratejinin gizli ontolojik kabuller sorununu çözdüğü iddiasını temellendirmeye çalışmıştır.

Şimdi bu stratejiyi daha iyi anlamak için, Boolos'un literatürde *Geach-Kaplan Cümlesi* (GKC) olarak bilinen bir birinciseviyeleştirilemez yargıyı nasıl yorumladığını inceleyelim.

(GKC) "Bazı eleştirmenler yalnızca bir diğerini takdir eder"

Eğer Txy ifadesi "x, y'yi takdir eder" olarak yorumlanırsa bu ifade şu şekilde biçimselleştirilebilir:

(GKC) $\exists X(\exists x Xx \wedge \forall x \forall y\ (Xx \wedge Txy \rightarrow \neg\ x = y \wedge Xy\ )$

Bu yargı şu şekilde yorumlanabilir: "*Öyle bir* boş olmayan eleştirmenler *küme*si vardır ki, kümenin elemanlarından her biri, birini takdir eder yalnızca eğer o bu kümenin (eleştirmenler kümesi) başka bir üyesiyse". Ancak Boolos'un önerdiği yorumlama şemasıyla bu yargıyı şu şekilde de yorumlayabiliriz: "*Öyle bazı* eleştirmen*ler* vardır ki bunlardan her biri, bir kişiyi takdir eder yalnızca eğer bu kişi *bunlardan biri*yse ve kendi kendisini takdir edenlerden değilse" (Boolos 1985: 328). Böylece ikinci seviye mantık ifadeleri kümeler gibi ontolojik kabullere başvurmadan yorumlanabilir.

Görüldüğü gibi Boolos sorunu ikinci seviye mantığa yeni bir semantik önererek çözmeye çalışmıştır. Bu yeni semantikte ikinci seviye niceleyiciler artık ilgi alanının temel nesnelerinin özellikleri üzerine değil, tıpkı birinci seviye niceleyiciler gibi, bu temel nesnelerin bizzat kendi üzerine nicelemede bulunur. Ancak tek bir farkla: İkinci seviye niceleyiciler çoğul karakterli olarak dikkate alınır. Böylece iki önemli sonuç ortaya çıkmaktadır. (1) İkinci seviye mantık birinci seviye mantıktan ötede bir ontolojik kabul gerektirmez. Ancak bundan daha da önemli bir sonuç şudur. (2) Quine (ve 20. yüzyılın başındaki bazı öncüleri) haklıysa kümeler kuramını ikinci seviye mantık aracılığıyla çalışmanın felsefi olarak sorunlu olduğunu kabul etmek gerekiyor. Çünkü bu durumda döngüsellik sorunu ortaya çıkar: Kümeler kuramı, saf mantıksal bir araçla değil, kendisi de gizli bir küme kuramsal hiyerarşiyi varsayan bir sistem aracılığıyla çalışılmış olur. Ancak Boolos'un önerdiği

[17] Gündelik dilde çokluğu bilindik niceleyicilere ek olarak "öncekiler", "sonrakiler" gibi bazı çoğul çapraz referanslar ile "öyle bazıları" gibi bazı çoğul niceleyicilerle de (*plural quantifier*) ifade ederiz ve bunlar "önceki", "sonraki" gibi tekil çapraz referanslardan ve "öyle biri" gibi bazı tekil niceleyicilerden ayrılır:

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

semantiği kabul edersek ve bu semantiğin küme kuramsal gizli ontolojik kabulleri sistem dışına attığını kabul edersek, anılan döngüsellik sorunu ortadan kalkar ve ikinci seviye mantık (savunucularına hak verip bir takım eksiklik sorunlarını da saymazsak) kümeler kuramını ve matematiğin temellerini çalışmanın tekrar etkili bir aracı haline gelir. Bu açıdan Boolos'un çalışması, mantığın yakın zamanlardaki önemli keşiflerinden biri olarak değerlendirilmelidir.

Boolos'un önerdiği semantiğin gizli ontolojik kabulleri sistem dışına atıp atmadığı bir tartışma konusudur[18]. Diğer taraftan Boolos'un savunmasının bir açıdan Quine'nın eleştirisine yanıt oluşturduğunu iddia etmek güçtür. Quine'nın gizli ontolojik kabuller eleştirisini yaparken hedef aldığı mantık, standart semantiği altında belirlenen ikinci seviye mantıktı. Ancak Boolos standart semantiğin gizli ontolojik kabuller içerdiği eleştirisine karşı çıkmaktan öte, yeni bir semantik belirlemiştir. Boolos semantiğinin standart semantiğin yerine geçip geçemeyeceği ayrı bir teknik soruşturma gerektirmektedir.

Sonuç

Bu çalışmada ikinci seviye mantığa yöneltilen iki temel eleştiri ve ilgili teknik konular mümkün olduğunca basit bir dille açık kılınmaya çalışılmıştır. İkinci olarak bu eleştirilerin altındaki temel motivasyon da tarihsel olarak açık kılınmaya çalışılmıştır: İkinci seviye mantığın mantıklığına getirilen bütün eleştiriler aslında bu sistemin matematiğin temellerini çalışma aracı olmak bakımından birinci seviye mantığın rakibi olup olamayacağı temelinde yapılmıştır.

Eleştiriler değerlendirildiğinde, bu iki eleştirinin de güçlü ve haklı olduğu ve karşı savunmaların yeterince güçlü olmadığı değerlendirilmesi yapılmıştır. Ancak tartışma saf kavramsal bir tartışma düzeyinde kalmamış, Boolos'un keşfinde olduğu gibi üretici bir tartışmaya da dönüşmüştür ve öyle görünüyor ki yakın gelecekte de yeni ve önemli keşiflere zemin hazırlayacaktır.

Kaynaklar

Boolos, G. S. (1975). "On Second-Order Logic", *The Journal of Philosophy*, Vol. 72, No. 16, pp. 509-527

Boolos, G. S. (1984). "To Be is to be a Value of a Variable (or to be Some Values of Some Variables)", *The Journal of Philosophy*, Vol. 81, No. 8, pp. 430-449.

---

[18] Boolos'un yorumlama şeması ikinci seviye mantık yargılarını yorumlamayı küme gibi bir kavrama başvurmadan ilk bakışta sağlıyormuş gibi görünüyor. Ancak yine de bu bir yanılsama olabilir mi? Örneğin "*Öyle bazı* eleştirmen*ler*" veya "*onlardan biri*" gibi ifadeler küme gibi bir nosyona sahip olmadan anlaşılabilir mi? Michael D. Resnik (1998) makalesinde bunun aksini, yani bu ifadelerin küme, sınıf veya topluluk gibi bir nosyona sahip olmadan anlaşılamayacağını ve bu yeni semantiğin de bu nedenle gizli ontolojik kabuller barındırdığını savunmuştur. Resnik'in bu uslamlaması (Bueno 2010: 373-376)'da gündelik dilsel sezgilerimizin küme kuramına öncelikli olduğu temelinde reddedilmiştir. Bu çalışmada da Resnik'in uslamlaması şu iki temelde reddedilmiştir: (1) Resnik'in iddiası felsefi argümanlarla değil, daha çok empirik sınama ile desteklenmesi gereken bir iddiadır. (2) Gündelik dildeki çoğul niceleyicilere ilişkin dilsel sezgilerimiz teknik bir küme kuramı çerçevesinde şekillenmez.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

Boolos, G. S. (1985). "Nominalist Platonism", *The Philosophical Review*, Vol. 94, No. 3, pp. 327-344.

Bueno, O. (2010). "A Defence Of Second-Order Logic", *Axiomathes,* Vol. 20, No. 2-3, pp. 365-383.

Cook, R. T. (2009a). "Transfinite Induction" *A Dictionary of Philosophical Logic*, Edinburg University Press

Cook, R. T. (2009b). "Weak Mathematical Induction", *A Dictionary of Philosophical Logic*, Edinburg University Press

Enderton, H. B. (2012). "Second-order and Higher-order Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2012 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/logic-higher-order/>.

Ferreiros, J. (2001). "The Road to Modern Logic – An Interpretation, *The Bulletin of Symbolic Logic,* Vol. 7, No. 4, pp. 441-484.

Forrest, P. (2012). "The Identity of Indiscernibles", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL =
<http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/identity-indiscernible/>.

Ketland, J. (2005). "Second-Order Logic"
URL=<https://www.era.lib.ed.ac.uk/bitstream/1842/1345/1/KetlandSecondOrderLogic.pdf>, erişim tarihi: Haziran 2014

Luna, L., Blum A. (2008). "Arithmetic and Logic Incompleteness – The Link", *The Reasoner*, Vol: 2, No: 3, p. 6.

Manzano M. (1996). *Extensions of First Order Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

Moore. G. H. (1988). "The Emergence of First-Order Logic", *History and Philosophy of Modern Mathematics*, ed. William Aspray ve Phillip Kitcher, Minneapolis: Minnesota University Press.

Papineau, D. (2012). *Philosophical Devices: Proofs, Probabilities, Possibilities, and Sets*, Oxford: Oxford University Press

Pickin, A. (web), "Is Second-Order Logic Really Logic?"
URL=<http://www.andrewpickin.com/uploads/Is_second-order_logic_really_logic.pdf>, erişim tarihi: Haziran 2014

Quine, W. V. O (1986a)[1970]. *Philosophy of Logic*, 2. baskı, Cambridge, Londra: Harvard University Press.

Quine, W. V. O (1986b). "Reply to Hao Wang", *The Philosophy of W. V. Quine*, ed. Paul Arthur Schlipp ve Lewis Edwin Hahn, La Salle: Open Court Publishing.

Resnik, M. D. (1998). "Second-Order Logic Still Wild", *The Journal of Philosophy,* Vol. 85, No. 2, pp. 75-87.

Rossberg, M. (2004). "First-Order Logic, Second-Order Logic and Completeness", *First-Order Logic Revisited,* Berlin: Logos.

Shapiro, S. (1991). *Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-order Logic*, Oxford: Oxford University Press

Shapiro, S. (1999). "Second-Order Logic", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge: Cambridge University Press.

Schumm G. F. (1999). "Completeness", *The Cambridge Dictionary of Philosophy,* 2. baskı, ed. Robert Audi, Cambridge: Cambridge University Press

Tanton, J. S. (2005). "Induction", *Encyclopedia of Mathematics*, New York: Facts of Files, Inc.

Tharp, L. H. (1975). "Which Logic is the Right Logic?", *Synthese*, Vol. 31, No. 1, pp. 1-21.

Woods. J. (1986). "A Captious Nicety of Argument", *The Philosophy of W. V. Quine*, ed. Paul Arthur Schlipp ve Lewis Edwin Hahn, La Salle: Open Court Publishing.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

Extended English Abstract

Being the pioneer of modern logic, Frege, with his quantification theory, was the pioneer of not only first-order logic, but also second-order logic: at the years when Frege was establishing the foundations of modern logic, there was no significant difference between quantifying an object and quantifying a property/relation. During the classical period of modern logic, both systems were in use in studies on the foundations of mathematics. This situation has changed gradually over time as pointed out by Ferreiros in his detailed (2001) study. Starting from the 1930s, by the effect of some meta-logical theorems, increasing number of mathematicians started to believe that second-order logic is not the proper *apparatus* of studying the foundations of mathematics. So, these mathematicians concluded that the best way of studying the foundations of mathematics is to study it within the borders of first-order logic. This has led the second-order logic's status to become controversial. This new trend continued even after the World War II, and in post-war years, first-order logic gradually became the most natural, paradigmatic and central system of logic, while the status of second-order logic became more and more controversial. In other words, controversies on second-order logic have gained a new dimension and the discussion of whether or not second-order logic is a pure-logical system has arisen. In these discussions, two arguments against the logicality of second-order system have come into prominence. The first argument points at the logical incompleteness of second-order system and the second argument points at the ontological commitments of the system. The first argument was most clearly asserted by Tharp (1975). According to Tharp, a system may be considered a logical system if it is (1) a good instrument of demonstration and (2) a good instrument for the characterization of structures. Because second-order logic is an incomplete system, it is not a good instrument of demonstration. And, if it is not a good instrument of demonstration, then it is not also a genuine system of logic. According to Tharp it is true that second-order logic has greater expressive power than its first-order rival: Thanks to its greater expressive power, it can characterize some important structures categorically while first-order logic cannot. But when two competing systems occurs, completeness criterion must be taken as a standard criterion to determine the better system and this criterion may not be sacrificed for other advantages of these systems. There are several strategies to counter this argument. The first one is, as pursued by Bueno (2010: 369), to undermine the motivation for considering completeness criterion as the most fundamental one by giving more importance to some virtues (for example higher expressive power) of second-order logic. But this strategy indeed means an undervaluation of the expressive power of first-order logic. Today the most common foundation of mathematics is ZFC, which is traditionally formulated and studied in first-order language. The second-strategy, which is pursued by several philosophers, is to propose a new logicality criterion, namely *decidability* criterion, which first-order logic doesn't satisfy. But this is not a conclusive strategy due to the fact that second-order logic doesn't satisfy this criterion either. As stated before, the second argument against the logicality of second-order system points at the ontological commitments of the system. Quine is clearly the pioneer of this criticism. According to Quine, second-order logic is not a pure logical system but rather it is "set theory in disguise". This criticism states that second-order logic ontologically commits some entities, namely sets. Because when the standard semantics of second-order logic considered, some statements of second-order logic (exactly those formulated by using second-order existential quantifier) can simply be interpreted as if they are statements about some sets. Also some valid formulas in second-order logic can also be interpreted as if they are statements about existence of some sets. For example the statement "$\exists X \forall x (Xx \leftrightarrow \neg\, x = x)$" can be interpreted as that there is a set X (for any domain of discourse) such that for all x, x is a member of X if and only if x is not identical to itself. So this formula states that there is a null set. If it is so, one more problem arises. Traditionally it is thought that a formal logical system must be a topic-neutral system. But if some valid formulas in second-order logic states facts about sets, it means that second-order logic is not a genuine logical system.

Öztürk, A. B. (2015). İkinci seviye mantığın mantıksallığı: İlgili tartışmalar üzerine eleştirel bir değerlendirme. *International Journal of Human Sciences*, *12*(2), 1712-1733. doi: 10.14687/ijhs.v12i2.3182

There are several strategies to counter this argument and most of them have come from Boolos. In his early respond to Quine, Boolos argued that second-order logic's ontological commitment to sets doesn't affect its logicality. Because "(…) the notions of set, class, property, concept, and relation, etc. have often been considered to be distinctively logical notions(…)" (1975: 520). But one can argue against Boolos that it is controversial whether or not the notion of set is a pure logical concept. Most people tend to consider this concept to be a more mathematical one. However, after several years from his first respond to Quine, Boolos, in his (1984) and (1985) articles, pursued a stronger strategy to counter Quine's criticism. This time Boolos argued that second-order logic has no ontological commitments to sets. To justify this claim, he proposed a new semantic for second-order logic by appealing to plural quantifiers and plural cross-references of natural language. For some reasons his semantic must be considered to be one of the most important discoveries of logic in modern times. But, this new semantic also brings about new conceptual and theoretical questions. Does Boolos' semantic really solve the ontological commitment problem of second-order logic, or it only provides an illusion? Can we understand the plural quantifiers without any appeal to the notion of set? Can standard semantic of second-order logic be replaced by Boolos' semantic? These are controversial issues for now.